Como 5 $\pi/8$ radianes es un ángulo del segundo cuadrante, $\cos(5\pi/8) < 0$ y $\operatorname{sen}(5\pi/8) > 0$. En consecuencia se toma la raíz cuadrada negativa como valor del coseno,

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

y la raíz cuadrada positiva como valor del seno

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \qquad \equiv$$

Notas del aula

i) ¿Se deben memorizar todas las identidades que se presentaron en esta sección? Pregúntelo a su profesor, pero en opinión de los autores, cuando menos debería memorizar las fórmulas (1) a (8), (14), (15) y las dos fórmulas en (18).
ii) Cuando se inscriba en un curso de cálculo, examine el título de su libro de texto. Si en su título tiene las palabras *Trascendentes tempranas,* casi de inmediato entrarán en acción sus conocimientos de las gráficas y propiedades de las funciones trigonométricas.
iii) Como se describió en las secciones 2.9 y 3.7, los temas principales de estudio en el cálculo son *derivadas* e *integrales* de funciones. Las identidades de suma (4) y (7) se usan para determinar las derivadas de sen x y cos x, vea la sección 4.11. Las identidades tienen utilidad especial en el cálculo integral. Reemplazar un radical por una función trigonométrica, como se ilustra en el ejemplo 1 de esta sección, es una técnica normal para evaluar algunos tipos de integrales. También, para evaluar integrales de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ se usarían las fórmulas de mitad de ángulo, en la forma que se presenta en (18):

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

En algún momento de sus estudios de cálculo integral se le pedirá evaluar integrales de productos como

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} 10x \cos 4x.$$

Una forma de hacerlo es usar las fórmulas de suma o diferencia para formar una identidad que convierta esos productos ya sea en una suma de senos o en una suma de cosenos. Vea los problemas 66 a 70 en los ejercicios 7.4.

9.4 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 y formule la expresión como expresión trigonométrica sin radicales, haciendo la sustitución indicada. Suponga que $a > 0$.

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad x = a\cos\theta$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\quad x = a\tan\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\quad x = a\sec\theta$, $\quad 0 \le \theta < \pi/2$
4. $\sqrt{16 - 25x^2}$, $\quad x = \frac{4}{5}\operatorname{sen}\theta$, $\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
5. $\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$, $\quad x = 3\operatorname{sen}\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
6. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2}$, $\quad x = \sqrt{3}\sec\theta$, $\quad 0 < \theta < \pi/2$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{7 + x^2}}$, $\quad x = \sqrt{7}\tan\theta$, $\quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$
8. $\dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{x}$, $\quad x = \sqrt{5}\cos\theta$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$

En los problemas 9 a 30, use una fórmula de suma o diferencia para determinar el valor exacto de la expresión indicada.

9. $\cos\dfrac{\pi}{12}$

10. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$

11. sen 75°

12. cos 75°

13. $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$

14. $\cos\dfrac{11\pi}{12}$

15. $\tan\dfrac{5\pi}{12}$

16. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$

17. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

18. $\tan\dfrac{11\pi}{12}$

19. $\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}$

20. $\tan\dfrac{7\pi}{12}$

21. cos 165°

22. sen 165°

23. tan 165°

24. cos 195°

25. sen 195°

26. tan 195°

27. cos 345°

28. sen 345°

29. $\cos\dfrac{13\pi}{12}$

30. $\tan\dfrac{17\pi}{12}$

En los problemas 31 a 34, use una fórmula de ángulo doble para escribir la expresión dada como una sola función trigonométrica del doble del ángulo.

31. $2\cos\beta\operatorname{sen}\beta$

32. $\cos^2 2t - \operatorname{sen}^2 2t$

33. $1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{5}$

34. $2\cos^2\left(\dfrac{19}{2}x\right) - 1$

En los problemas 35 a 40, use la información presentada para determinar ***a)*** cos $2x$, ***b)*** sen $2x$ y ***c)*** tan $2x$.

35. $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/3, \quad \pi/2 < x < \pi$

36. $\cos x = \sqrt{3}/5, \quad 3\pi/2 < x < 2\pi$

37. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad \pi < x < 3\pi/2$

38. $\csc x = -3, \quad \pi < x < 3\pi/2$

39. $\sec x = -\frac{13}{5}, \quad \pi/2 < x < \pi$

40. $\cot x = \frac{4}{3}, \quad 0 < x < \pi/2$

En los problemas 41 a 48, use la fórmula de mitad de ángulo para determinar el valor exacto de la expresión dada.

41. cos $(\pi/12)$

42. sen $(\pi/8)$

43. sen $(3\pi/8)$

44. tan $(\pi/12)$

45. cos 67.5°

46. sen 15°

47. csc $(13\pi/12)$

48. sec $(-3\pi/8)$

En los problemas 49 a 54 use la información indicada para determinar ***a)*** $\cos(x/2)$, ***b)*** $\operatorname{sen}(x/2)$ y ***c)*** $\tan(x/2)$.

49. $\operatorname{sen} t = \frac{12}{13}, \quad \pi/2 < t < \pi$

50. $\cos t = \frac{4}{5}, \quad 3\pi/2 < t < 2\pi$

51. $\tan x = 2, \quad \pi < x < 3\pi/2$

52. $\csc x = 9, \quad 0° < x < \pi/2$

53. $\sec x = \frac{3}{2}, \quad 0° < x < 90°$

54. $\cot x = -\frac{1}{4}, \quad 90° < x < 180°$

55. Si $P(x_1)$ y $P(x_2)$ son puntos del cuadrante II en el lado terminal de los ángulos x_1 y x_2, respectivamente, y $\cos x_1 = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen} x_2 = \frac{2}{3}$, determine ***a)*** sen $(x_1 + x_2)$, ***b)*** cos $(x_1 + x_2)$, ***c)*** sen $(x_1 - x_2)$ y ***d)*** cos $(x_1 - x_2)$.

56. Si x_1 es un ángulo del cuadrante II, x_2 es un ángulo del cuadrante III, $\operatorname{sen} x_1 = \frac{8}{17}$, y $\tan x_2 = \frac{3}{4}$, determine ***a)*** sen $(x_1 + x_2)$, ***b)*** sen $(x_1 - x_2)$, ***c)*** cos $(x_1 + x_2)$ y ***d)*** cos $(x_1 - x_2)$.

Aplicaciones diversas

57. Número de Mach La relación de la velocidad de un avión con la velocidad del sonido se llama número de Mach, M,